Clément LAMAT

LES PARADOXES

et ce qu'ils peuvent nous apprendre

A propos de la couverture

Les titres et sous-titres, que j’ai réalisés moi-même, sont constitués respectivement à partir du triangle de Penrose et du ruban de Moebius.

Voyage au cœur des paradoxes

Qu'est-ce qu'un paradoxe ? Je dirais qu'il s'agit d'un énoncé contre-intuitif, qui parait faux alors qu'il est vrai. Cela rejoint d'ailleurs l'étymologie du mot, qui vient de *para* (« contre ») et *doxa* (« opinion »), soit un énoncé allant contre le sens commun. Cela leur donne immédiatement un intérêt, puisqu'ils sont matière à réflexion. Avec un énoncé simple, ils attirent notre attention, et nous font méditer sur les manières de les résoudre. Leur solution, lorsqu'elle existe, est toujours plus complexe que leur énoncé, mais la satisfaction de les voir résolus compense cette difficulté.

Les paradoxes se présentent sous différents types. Intuitivement, on distingue ceux qui ont été résolus de ceux pour lesquels seules des hypothèses existent. Une classification plus poussée des paradoxes en trois catégories a été proposée par Willard Quine[1] en 1962. Il nomme « paradoxes véridiques » les résultats qui semblent absurdes, mais dont on a prouvé la véracité. On peut ranger l'hôtel de Hilbert dans cette catégorie par exemple. Au contraire, les « paradoxes incorrects » sont des résultats absurdes dont on a prouvé qu'ils étaient effectivement faux, comme le paradoxe de Zénon. Enfin, les paradoxes ne rentrant dans aucune de ces 2 catégories sont des antinomies, pour lesquelles des raisonnements justes conduisent à des conclusions contradictoires. On peut citer le paradoxe du menteur et le paradoxe du barbier comme exemples.

Les paradoxes sont non seulement intéressants intellectuellement, mais ils ont aussi de nombreux usages. En philosophie, ils peuvent être utilisés pour pointer les contradictions dans une thèse, ou pour dévoiler la complexité du monde. Ils peuvent également mettre en lumière les faiblesses de notre bon sens par rapport à une approche systématique quand il s'agit d'évaluer intuitivement un problème. Dans le monde scientifique, un paradoxe pointe les limites du modèle actuel. Loin d'être un problème, c'est souvent le premier jalon vers une découverte importante ou une nouvelle théorie. Dans toutes les

1 Willard V.O. Quine (1908-2000) était un philosophe et logicien américain. Il a développé sa classification des paradoxes dans son recueil d'essais *Les voies du paradoxe.*

disciplines scientifiques, ils ont permis des avancées importantes et sont aujourd'hui encore les moteurs de nouvelles recherches.

J'aimerais avec ces articles illustrer toute la diversité des paradoxes, vous surprendre avec leurs solutions, vous intéresser aux disciplines abordées, et montrer l'utilité des paradoxes dans la quête de la connaissance.

Note aux lecteurs

Le dossier que vous vous apprêtez à lire traite de paradoxes dans des domaines variés, qui ont parfois des aspects complexes. Mon but est de vous faire découvrir quelques notions intéressantes, et peut être de vous donner envie de creuser davantage ces sujets. J'ai conscience que certains passages sont difficiles à comprendre en une seule lecture. Les preuves mathématiques, notamment, utilisent dans certaines parties des notions avancées (de niveau L1 de maths ou première année de prépa). Ces preuves ne font pas partie de l'essentiel de ce dossier, elles sont là pour satisfaire ceux qui veulent connaître les justifications des résultats. Par ailleurs, lorsque j'ai moi-même découvert certains de ces paradoxes, je n'ai pas compris leurs preuves la première fois que je les ai vues. J'espère donc que ces preuves ne vous décourageront pas.

Vous pouvez, si vous le souhaitez, les lire et essayer de les comprendre, mais vous n'y êtes pas obligés. Vous pouvez aussi me faire confiance et accepter les résultats comme vrais. Je pense qu'ils sont suffisamment étonnants pour mériter d'être étudiés séparément de leurs preuves. Et, bien sûr, il n'y a pas que des paradoxes mathématiques dans ce dossier, et les articles sur les autres disciplines ne comportent pas de telles preuves.

Par ailleurs, la structure du dossier suit une certaine logique : d'abord les paradoxes résolus, puis ceux pour lesquels on n'a aucune solution à l'heure actuelle. Les paradoxes seront dans chaque section disposés de façon à varier les disciplines : ainsi, les deux paradoxes mathématiques ne se suivent pas directement. Enfin, au début de chaque article, l'état du paradoxe est indiqué (s’il est ou non résolu, et le cas échéant sa classification de Quine). D’ailleurs, il y a nettement plus de paradoxes résolus que d’hypothétiques dans ce dossier.

Pour finir, voici une citation de Bertrand Russell[2]. Elle résume parfaitement l’utilité des paradoxes : en nous poussant à aller plus loin que le bon sens, vers une analyse plus fine, ils participent à l’élaboration de la connaissance.

« Le bon sens, quoi qu'il fasse, ne peut manquer de se laisser surprendre à l'occasion. Le but de la science est de lui épargner cette surprise et de créer des processus mentaux qui devront être en étroit accord avec le processus du monde extérieur, de façon à éviter, en tout cas, l'imprévu »

2 Bertrand Russell (1872-1970), célèbre mathématicien, philosophe et logicien britannique, prix Nobel de littérature, est entre autres à l’origine du paradoxe du barbier, qui est l’objet d’un article de ce dossier.

L’infini

0,999… = 1 (Prouvé vrai)

Le concept d’infini est sans doute l’un des plus fascinants des mathématiques. Il défie notre imagination et conduit à des résultats qui peuvent sembler absurdes. Un de ces cas est l’égalité $0{,}9999\ldots=1$.

Au premier regard, on a envie de rejeter ce résultat. En effet, un nombre commençant par “ $0{,}\ldots$ ” est immédiatement perçu comme inférieur à 1. Il semble même souvent bien inférieur même lorsqu’il est très proche, dans le cas de 0,99 par exemple. Pour évaluer un chiffre, nous avons tendance à nous baser sur les chiffres avant la virgule, et à sous-évaluer la partie fractionnaire : c’est l’une des manifestations de l’effet d’ancrage[3]. Ce phénomène permet de comprendre pourquoi une grande partie des prix finissent par un 9[4]. Il explique aussi en partie le fait que l’affirmation $0{,}9999\ldots=1$ semble fausse.

Cependant, l’explication la plus importante de ce paradoxe est à chercher ailleurs. Elle vient de notre incapacité à percevoir correctement l’infini, cet infini qui intervient dans la définition de $0{,}9999\ldots$. Ce nombre contient une infinité de chiffres 9 qui se succèdent, c'est cela qui le rend infiniment proche de 1. En effet, on a : $1-0{,}9999\ldots=0{,}0000\ldots=0$

Il s'agit là d'une manière de comprendre ce résultat intuitivement, mais pas d'une preuve rigoureuse. La preuve suivante utilise ce principe, mais est plus convaincante :

On note $x=0{,}9999\ldots$

Alors $10x=9{,}9999\ldots$

$10x-x=9{,}9999\ldots-0{,}9999\ldots$

$9x=9$ soit $x=1$.

3 L’ancrage est, de manière générale, le fait d’être fortement influencé par une première impression ou l’information reçue en premier : Tversky, « Judgement under Uncertainty : Heurisitics and Biases », Science, sep. 27 1974

4 Cette étude étudie la perception des prix finissant par 99 : Thomas, Manoj; Morwitz, Vicki (June 2005). "Penny Wise and Pound Foolish: The Left-Digit Effect in Price Cognition". Journal of Consumer Research.

La preuve suivante plaira sans doute davantage aux férus de mathématiques. Malgré son aspect technique pour les non-initiés, elle possède un avantage indéniable par rapport aux précédentes, puisqu’elle permet de mettre directement en lumière le rôle de l'infini dans le résultat, en plus d'être plus rigoureuse. Elle repose en effet sur la notion de sommes infinies (appelées "séries"). Le fait d'attribuer une valeur à une somme infinie de termes non nuls semble contre-intuitif (nous allons y revenir plus loin), mais cela est possible dans certains cas, comme ici. En effet, le nombre $0{,}9999\dots$ est défini comme $0{,}9+0{,}09+0{,}009+\dots$, soit encore :

$9\times 0{,}1+9\times 0{,}01+9\times 0{,}001+\dots$

Ou bien :

$$9\times\left(\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\dots\right)=9\times\sum_{k=1}^{+\infty}\text{¿}\ \frac{1}{10}\text{¿}^{k}\ \text{¿}$$

Cette forme de somme infinie est remarquable : c'est la somme d'un nombre constant, la raison (ici $\frac{1}{10}$), porté à une puissance variable. On appelle ce type de série les séries géométriques. Le fait d'avoir identifié une série géométrique va nous permettre de calculer son résultat[5]. On va pour cela s'intéresser aux sommes partielles : on ne somme pas jusqu'à l'infini, mais jusqu'à un certain entier n. On peut alors obtenir l'expression de la somme partielle grâce à cette formule propre aux séries géométriques[6] :

$$9\times\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}=9\times\text{¿}\ \frac{1}{10}\text{¿}^{n+1}-\frac{1}{10}\ \text{¿}\ \text{¿}$$

5 En particulier, on peut toujours calculer la valeur d’une série géométrique dont la raison est strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Si ce n’est pas le cas, la série n’a pas de valeur numérique : on dit qu’elle diverge.

6 La preuve de cette formule est à la fin de cet article, si cela vous intéresse

Il reste à faire tendre n vers l'infini dans cette formule. En faisant cela, le terme $\frac{1}{10}¿^{n+1}¿$ tend vers 0, et il reste alors ceci :

$$\frac{9\times\left(\frac{-1}{10}\right)}{\frac{1}{10}-1}=\frac{\frac{-9}{10}}{\frac{-9}{10}}=1$$

On a bien démontré que $0{,}999...=1$.

Preuve de la formule sur les suites géométriques :

$$\sum_{k=0}^{n} \square ¿\; x\left(¿¿k+1-x^{k}\right)=x^{n+1}-1$$

(Tous les termes de la somme s'annulent sauf le plus grand et le plus petit)

On factorise ensuite dans la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \square ¿\; x\left(¿¿k+1-x^{k}\right)=(x-1)\sum_{k=0}^{n} \square x^{k}$$

On a finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \square x^{k}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Paradoxe de Zénon (Prouvé faux)

Nous avons vu une application des séries géométriques. Elles ont permis de prouver l'égalité précédente, mais, plus impressionnant encore, elles ont permis de résoudre un paradoxe datant de l'Antiquité : le paradoxe d'Achille et la tortue. Ce paradoxe, formulé par Zénon d'Élée au Ve siècle av JC, s'énonce de la manière suivante :

Achille et une tortue s'affrontent à la course. Achille, étant donné qu'il est bien plus rapide que la tortue, accepte de lui laisser 100 mètres d'avance. Ils s’élancent et Achille parcourt rapidement les 100 mètres qui le séparent de la position initiale de la tortue. Mais pendant ce temps, la tortue a elle aussi parcouru une distance, certes bien plus faible. Achille continue de courir jusqu’à atteindre la nouvelle position de la tortue, mais pendant ce temps, la tortue a encore avancé.

Zénon conclut alors que, bien qu’Achille aille bien plus vite que la tortue, à chaque fois qu’il atteint une position passée de la tortue, la tortue sera légèrement plus loin, et ainsi de suite jusqu’à l’infini : Achille ne peut jamais dépasser ni même revenir à la hauteur de la tortue, il perd donc la course.

Ce raisonnement a été invalidé par les mathématiques modernes, et justement, c’est encore une série géométrique qui permet de résoudre cet apparent paradoxe. Supposons pour simplifier qu’Ulysse court à 10m/s, tandis que la tortue va à 2m/s[7]. Calculons le temps que mettra Ulysse pour rattraper la tortue, sachant qu’il lui laisse 100 mètres d’avance. Pour parcourir les 100 premiers mètres, il lui faudra 10 secondes. La tortue aura pendant ce temps parcouru 20 mètres, et Ulysse parcourra ensuite ces 20 mètres en deux secondes. La tortue aura alors parcouru 4 mètres de plus, et ainsi de suite. Le temps t en secondes que met Ulysse à rattraper la tortue est donc de $10+2+0{,}4+\dots$, soit, en l’écrivant comme une série :

$$t = 10 \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{10}\right)^k$$

En utilisant la formule pour les séries géométriques, on trouve :

$$t = \frac{10}{1-\frac{2}{10}} = \frac{100}{8} = 12{,}5\,s$$

Achille rattrape donc la tortue en un peu plus de 12 secondes, et gagne la course.

7 Cette vitesse n’est pas réaliste, mais elle permet de simplifier les calculs. Le paradoxe reste le même quelle que soit la vitesse choisie, du moment que la tortue est plus lente qu’Achille.

Sans l’aide des outils mathématiques, même un philosophe de l’Antiquité a formulé des conclusions fausses sur au sujet de l’infini. Cela montre bien que ce concept est difficile à appréhender, et que l’étude mathématique de l’infini, dont les séries géométriques ne représentent qu’une petite partie, est passionnante.

Paradoxe de l’hôtel de Hilbert (Prouvé vrai)

L’hôtel de Hilbert, du nom du mathématicien David Hilbert, illustre les propriétés paradoxales de l’infini. C’est un hôtel composé d’une infinité de chambres, numérotées à partir de 1, et toutes occupées.

Supposons qu’une nouvelle personne se présente à la réception. Il serait refusé dans un hôtel normal où toutes les chambres sont occupées. Mais ici, c’est différent : l’hôtelier demande à tous les clients de se déplacer dans la chambre adjacente (de la chambre n°1 vers la 2, de la 2 vers la 3, etc…). Cela libère la chambre 1 pour le nouvel occupant. Il ne pouvait pas l’envoyer trouver une chambre à l’infini, car il n’y serait jamais arrivé. La procédure est la même si un car de 100 personnes arrive, mais cette fois-ci, les clients ne se décalent pas d’une chambre, mais de 100. Cette histoire illustre le fait que l’infini plus un nombre fini reste l’infini.

Mais supposons à présent qu’arrive à l’hôtel un autobus infini plein de nouveaux clients, étant tous sur un siège numéroté à partir de 1. Ce n’est pas un problème pour l'hôtelier, qui demande à chaque personne de se déplacer à la chambre ayant pour numéro le double de leur chambre actuelle. Cela laisse toutes les chambres impaires libres, tout en laissant à chaque client un déplacement fini à faire, bien qu’il devienne de plus en plus long vers le fond de l’hôtel. Chaque passager de l’hôtel peut alors s’installer dans une chambre impaire : le passager ayant le siège numéro k ira dans la chambre $2k-1$. Ainsi, l’infini fois un nombre fini reste l’infini.

En se basant sur ce constat, on pourrait se dire qu’il n’existe rien de plus grand que l’infini. Et pourtant, ce n’est pas le cas ! C’est ce qu’a prouvé Georg Cantor, en montrant que l’ensemble infini des nombres à virgules entre 0 et 1 (qui contient des nombres pouvant s’écrire comme des fractions, comme $\frac{1}{3}$, et d’autres qui ne le peuvent pas, comme $\pi - 3$) est plus grand que l’ensemble infini des nombres entiers positifs.

Supposons qu’on veuille numéroter tous les nombres à virgule (appelés “nombres réels”) entre 0 et 1. Si l’on réussit, on aura montré que l’ensemble des nombres entiers positifs a la même taille que cet ensemble (puisque chaque réel sera associé à un entier et vice-versa). On associe donc un nombre réel entre 0 et 1 à chaque entier, et on les positionne dans un tableau infini.

Nous allons maintenant pouvoir trouver un nombre réel entre 0 et 1, mais qui ne se trouve pas dans le tableau. Appelons ce nombre x et supposons, pour l’exemple, qu’on a le tableau suivant :

Entier	Réel
1	0,9180586…
2	0,5648971…
3	0,4578827…
4	0,7875535…
…	…

Pour avoir le premier chiffre après la virgule de x , nous allons ajouter 1 au premier chiffre après la virgule du nombre n°1, ce qui donne ici 0 car on ne compte pas la retenue. Nous faisons ensuite la même chose avec le nombre n°2, cette fois-ci pour le deuxième chiffre après la virgule. De manière générale, pour obtenir le n-ième chiffre après la virgule de x , on ajoute 1 au n-ième chiffre après la virgule du nombre numéro n. Dans notre exemple, on a donc $x = 0{,}0786\ldots$

x n’est pas dans le tableau car il ne correspond à aucun nombre de celui-ci : son 1er chiffre est différent de celui du nombre 1, son 2e chiffre de celui du nombre 2, et son n-ième chiffre de celui du nombre n de manière générale. Il n’est donc pas possible de numéroter tous les réels entre 0 et 1, ce qui veut dire que l’ensemble infini de ces nombres est plus grand que l’ensemble des nombres entiers positifs.

Des phrases qui défient la logique

Paradoxes du menteur et du barbier (Prouvés vrais)

Depuis l'Antiquité, la logique occupe une place importante en philosophie. C'est, en effet, sur la logique que doit se fonder toute argumentation correcte. Et la logique elle-même a été fondée sur un principe simple, nommé "principe de bivalence" : toute proposition est soit vraie, soit fausse. Ce principe semble intuitivement évident, mais nous allons voir qu'il est assez fragile en réalité.

Pour le mettre à l'épreuve, il faut donc trouver une phrase qui ne soit ni vraie, ni fausse. En y réfléchissant un peu, on peut trouver de telles phrases en utilisant par exemple le futur. Ainsi, la phrase "Il va pleuvoir demain" n'est ni vraie ni fausse : on peut estimer sa vraisemblance aujourd'hui en se basant sur la météo, mais sa valeur logique ne sera vraiment définie qu'une fois le lendemain passé. En attendant, elle reste indéterminée.

On peut même trouver d'autres types d'indétermination que l'indétermination temporelle, comme l'indétermination quantique (en utilisant le principe d'incertitude de Heisenberg[8]), ou encore l'ambiguïté de certaines phrases. Cependant, ces exemples ne remettent pas vraiment en question la logique. En effet, l'ambiguïté peut être éliminée en précisant les termes, et les indéterminations viennent de propositions qui ne peuvent être évaluées, car défiant les lois de la nature. Ainsi, le fait qu'une phrase traitant du futur n'est ni vraie ni fausse n'est pas paradoxal, c'est plutôt l'inverse qui le serait.

Cependant, il existe bien des phrases n'utilisant pas les astuces précédentes, et qui ne sont ni vraies ni fausses. La plus célèbre constitue le paradoxe du menteur, qui remonte à l'Antiquité. Voici la formulation d'Eubulide du Milet, au 4e siècle av JC : "Un homme disait qu'il était en train de mentir. Ce que l'homme disait est-il vrai ou faux ?". Le philosophe de l'Antiquité Philétas de Cos serait mort d'insomnie à cause de ce paradoxe, et on peut comprendre

8 Le principe d'incertitude de Heisenberg est une des lois fondamentales de la mécanique quantique. Pour simplifier, elle dit qu'on ne peut pas connaître exactement à la fois la vitesse et la position d'une particule à un instant donné. Plus la mesure de la position est précise, plus la vitesse est incertaine et inversement.

pourquoi : si l’homme dit la vérité, alors il est en train de mentir, donc la phrase est fausse. Mais si elle est fausse, c’est qu’il ment, donc il dit la vérité. Ainsi, la phrase ne peut être ni fausse ni vraie : dans les deux cas, cela cause une contradiction.

D’autres phrases ont été construites sur le même principe. On peut citer la phrase “Cette phrase est fausse”, ou encore le paradoxe du barbier. Dans un village, la loi oblige le barbier à raser tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et à ne pas raser les autres. Mais alors, que peut faire le barbier (qui est un homme du village) avec sa barbe ? S’il la rase, alors il se rase lui-même, donc il ne peut pas se raser. S’il la laisse pousser ou demander à quelqu’un d’autre de la raser, il enfreint la loi, car alors il ne se rase pas lui-même, donc il doit se raser. Un tel barbier ne peut donc pas exister.

Ce paradoxe est l’illustration d’un paradoxe plus général en théorie des ensembles : le paradoxe de Russell. Ce paradoxe fut découvert par Russell à la lecture d’un ouvrage de Gottlob Frege, *Les lois fondamentales de l’arithmétique*, dans lequel il cherchait à fonder les mathématiques sur des bases purement logiques. Ce paradoxe permit à Russell de créer une meilleure base pour les mathématiques, mais il entraîna des conséquences terribles pour Frege.

En effet, il reçut la lettre de Russell expliquant le paradoxe le jour où il devait donner le manuscrit du second volume des *Lois fondamentales de l’arithmétique* à l’imprimeur. Ce second volume avait nécessité 10 ans de travail, et était complètement faux, puisque les bases qu’il avait posées aboutissaient au paradoxe de Russell et donc à une contradiction. Frege a finalement publié son ouvrage, en ajoutant un addendum au début pour expliquer l’affaire.

Il y écrit notamment : : “Pour un écrivain scientifique, il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. C'est dans cette situation inconfortable que m'a mis une lettre de M. Bertrand Russell, alors que le présent volume allait paraître.” Frege rentre alors dans une longue dépression, aggravée par le décès de sa femme en 1904, et arrête définitivement ses travaux en mathématiques.

Revenons au paradoxe du menteur. Ce paradoxe fut résolu par le logicien Alfred Tarski, lorsqu'il définit le concept de vérité dans un langage. Lorsqu'on étudie une phrase, comme “Le chat est bleu”, dans un langage donné, et qu'on parle de cette phrase (par exemple “La phrase “Le chat est bleu” est fausse”), on utilise en fait le méta-langage, le langage qui parle du langage. On est à un niveau de description supérieur (ce qui est marqué par les deux niveaux de guillemets). Tarski définit le concept de vérité pour des phrases du langage uniquement dans le méta-langage, ce qui est le point décisif. “Je suis en train de mentir” est une phrase de méta-langage, elle n'a pas de valeur de vérité, car lui en donner une reviendrait à la considérer comme faisant partie du langage. De même pour “Cette phrase est fausse”, car on ne peut décrire une phrase et sa fausseté au même niveau du langage.

La résolution de ce paradoxe ancien a donc permis de bien définir la notion de vérité dans un langage, mais pas seulement. Il fut également utilisé par Kurt Gödel dans la démonstration de son célèbre théorème d'incomplétude[9], mais aussi dans “l'énigme la plus difficile du monde”[10]. Cette simple phrase, qui tourmentait les philosophes et logiciens depuis l'Antiquité, a un héritage impressionnant.

Un paradoxe qui illustre la puissance des probabilités

Paradoxe des anniversaires (Prouvé vrai)

9 Pour en savoir plus sur le théorème d'incomplétude : https://www.youtube.com/watch?v=82jOF4Q6gBU

10 Énoncé et réponse à cette énigme : https://fr.wikipedia.org/wiki/L%27%C3%A9nigme_la_plus_difficile_du_monde

Le paradoxe des anniversaires est sans doute l'un des paradoxes les plus fascinants des mathématiques. Il a été élaboré par Harold Davenport en 1927. Pour l'aborder, on peut poser le problème suivant :

Supposons qu'un lycée contienne 10 classes avec chacune 30 élèves. Dans combien de classes trouve-t-on au moins 2 élèves qui sont nés le même jour ? Bien entendu, on ne peut pas fournir une réponse exacte à cette question, mais on cherche tout de même une estimation. Pensez-vous que le fait que 2 personnes aient une date de naissance commune dans un groupe de 30 est rare ou courant ? Cette question revient à estimer la probabilité d'un tel événement. L'intuition, dans ce cas, est que cet événement est plutôt rare. Et pour savoir si notre intuition est juste, il faut s'intéresser aux probabilités.

On cherche la probabilité que dans un groupe de 30 personnes choisies au hasard, au moins 2 d'entre elles aient le même jour de naissance. Pour simplifier le calcul, on va considérer l'événement inverse (dans le langage probabiliste, il est appelé le “complémentaire"), c'est-à-dire que dans un groupe de 30 personnes, aucune n'ait le même jour de naissance. Pour déterminer cette probabilité, il faut diviser le nombre de cas favorables, ceux où le groupe de 30 personnes ne contient pas de membres ayant le même jour de naissance, par le nombre total de possibilités[11].

Si on considère un groupe qui remplit cette condition et qu'on numérote chaque membre du groupe, la personne 1 peut être née n'importe quel jour de l'année, mais la personne 2 ne peut pas être née le même jour que la personne 1, car cela contredirait la condition. Il lui reste 364 jours de naissance possibles, puis 363 pour la personne 3, et ainsi de suite jusqu'à la personne 30 qui a 336 jours de naissance possibles. Le nombre de groupes possibles vérifiant la condition est donc $365 \times 364 \times 363 \times ... \times 336$.

Pour le nombre total de groupes de 30 personnes possibles, comme chaque personne a un jour de naissance parmi les 365 possibilités, le nombre total de groupes est 365^{30} . La probabilité qu'un groupe de 30 personnes

11 Cette formule pour déterminer la probabilité n'est pas applicable dans tous les cas. Elle est utilisée uniquement dans les situations dites ”d'équiprobabilité”, c'est-à-dire que chaque issue possible a la même probabilité de survenir. On a supposé ici que le groupe était composé de personnes choisies au hasard, chaque membre du groupe a donc une probabilité égale d'être né chacun des 365 jours de l'année. On est donc en équiprobabilité dans ce problème.

comporte 30 jours de naissance différents est donc finalement $\frac{365!}{335! \times 365^{30}}$

Enfin, la probabilité qu'on cherchait au départ, celle d'avoir au moins 2 personnes avec le même jour de naissance, est simplement la probabilité opposée : $1-\frac{365!}{335! \times 365^{30}}$, soit environ 0,7 (ou 70%).

Il est donc très probable qu'au moins 2 personnes de cette classe aient le même jour de naissance, ce qui va à l'encontre de notre intuition. Dans le cas d'une classe de 40 élèves, la probabilité s'élève même à 89% ! Il semble que notre intuition ait une mauvaise approche pour estimer cette probabilité. Une explication probable vient du fait qu'on ait tendance à ramener le problème à nous-mêmes, en estimant qu'il est très improbable que dans un groupe de 30 ou 40 personnes, quelqu'un partage le même jour de naissance que nous (soit 29 ou 39 possibilités). Cela revient à totalement ignorer les appariements entre les autres membres du groupe (soit 465 ou 820 possibilités).

Ce problème, bien qu'abstrait, illustre bien la puissance des probabilités. Dans les situations d'incertitude, elles permettent d'estimer quelle issue a le plus de chances de se produire et de prendre les meilleures décisions possibles. Comme cet exemple et de nombreux autres l'illustrent, l'utilisation des probabilités ne requiert pas beaucoup de calculs, mais une rigueur concernant la modélisation du problème et les lois utilisées, et est considérablement plus juste que l'intuition.

Le mystère du cancer

Paradoxe de Peto (Non résolu)

Le cancer est un mal qui touche toutes les espèces de vertébrés. Il se déclenche lorsqu'une cellule de l'organisme a suffisamment muté pour devenir une cellule tumorale, se multipliant sans cesse pour devenir une tumeur. On pourrait alors penser que plus un animal est gros, plus il a de cellules, et donc plus il a de chance d'avoir des cancers. Ce fait se vérifie au sein d'une même espèce : les gros chiens ont plus de chance d'avoir des cancers que les petits, et c'est la même chose pour les humains. Mais, et c'est là le paradoxe découvert par Richard Peto, les plus gros animaux, comme les éléphants ou les baleines, ont moins de chance de mourir d'un cancer que les humains, bien qu'ils soient des dizaines de fois plus massifs.

On observe le même phénomène entre les humains et les souris, ce qui montre que ce phénomène ne vient pas de notre mode de vie. Ainsi, un homme a 1000 fois plus de cellules qu'une souris, et vit en moyenne 30 fois plus longtemps. Au lieu de constater que les humains ont beaucoup plus de cancer que les souris, ce qui semble logique, Peto a constaté que les humains avaient environ le même nombre de cancers que les souris.

Comment expliquer ce phénomène ? Peto a avancé l'hypothèse que l'évolution des espèces les plus massives les a amenées à avoir des mécanismes anti-cancer très efficaces. Les individus ayant de tels mécanismes ont en effet un avantage considérable sur leurs congénères en termes de survie, ce qui est moins le cas pour des espèces plus petites. Une étude d'octobre 2015 a montré que les éléphants possédaient 20 paires d'un gène suppresseur de tumeurs, alors que les humains n'en possèdent qu'une, ce qui conforte cette hypothèse. La recherche sur ce phénomène pourrait permettre des avancées dans la lutte contre le cancer.

D'autres chercheurs avancent que le taux de mutation de chaque cellule pourrait être plus faible chez les gros mammifères que chez les petits. Une autre hypothèse est que le système immunitaire plus développé des gros mammifères les aident à mieux résister au cancer. Enfin, l'hypothèse des hypertumeurs est également avancée. Elle avance que les tumeurs des organismes plus gros sont elles aussi plus grosses, et que des hypertumeurs peuvent se former dans ces grosses tumeurs. Ce sont des tumeurs de tumeurs, qui accaparent les ressources de la tumeur, pouvant conduire à la destruction de celle-ci. Les cancers chez les gros mammifères seraient, à cause de ce phénomène, plus fréquents mais moins létaux, ce qui expliquerait le paradoxe.

Aucune des théories citées ne fait consensus à l'heure actuelle pour expliquer le paradoxe. La réponse est sans doute un mélange de plusieurs de ces théories. En attendant, ce paradoxe reste l'objet de recherches actives, et permettra sans doute une meilleure compréhension des mécanismes du cancer, et pourrait même donner des pistes de traitement.

Un paradoxe cosmique

Paradoxe de Fermi (Non résolu)

Le sujet de la vie extraterrestre a toujours intéressé les hommes, bien qu'aucune autre forme de vie n'ait été découverte depuis que nous explorons l'espace. Et pourtant, l'Univers a existé pendant des milliards d'années avant notre apparition. Ce problème est la source du paradoxe de Fermi.

Le physicien et lauréat du prix Nobel Enrico Fermi a formulé pour la première fois ce paradoxe en 1950. Il se demandait pourquoi, parmi les milliards d'étoiles de notre galaxie, nous n'avions trouvé aucune trace de civilisations extraterrestres, notamment des ondes radio, que nous aurions pu capter à l'aide de nos radiotélescopes. Bien qu'ayant développé ces technologies récemment, nous avons depuis essayé de communiquer notre présence à d'autres civilisations, par exemple via le message d'Arecibo.

Fermi soutient que si une civilisation extraterrestre existait, et qu'elle voulait conquérir la Galaxie, qui fait 100 000 années-lumière de diamètre, elle aurait pu le faire en une dizaine de millions d'années. Ce chiffre est très faible par rapport au temps qu'il a fallu à la vie sur Terre pour évoluer jusqu'à notre civilisation, à savoir plusieurs milliards d'années.

On peut donc résumer le paradoxe ainsi : si une civilisation extraterrestre existe, elle aurait dû avoir colonisé la Galaxie ou au moins laisser des traces radio. Mais le fait qu'elle n'existe pas semble improbable au vu de l'âge de notre Galaxie et de sa taille gigantesque.

Ce paradoxe a suscité beaucoup de débats, notamment dans les années 1970. L'astrophysicien Michael Hart a formulé quatre hypothèses pour tenter de résoudre ce paradoxe. La première est que l'apparition d'une civilisation aussi avancée que la nôtre est extrêmement peu probable, si bien que nous soyons la première à apparaître dans notre galaxie. Ou alors, il existe d'autres civilisations extraterrestres, mais elles ne souhaitent pas communiquer ni conquérir la galaxie. Il se peut aussi que la vie existe mais soit indétectable pour nous, par exemple sous une couche de glace dans des planètes-océan. Enfin, il se peut qu'une civilisation ait bien conquis la galaxie, mais qu'elle est indétectable par nos technologies actuelles et qu'elle ne souhaite pas qu'on la découvre.

Les astronomes Thomas Kuiper et Mark Morris ont émis une autre théorie. Ils proposent que les civilisations technologiques s'éteignent rapidement, et que nous sommes donc la seule existante aujourd'hui. Cela se rapproche du concept de “grand filtre”, théorisé par l'économiste Robin Hanson : l'évolution de la vie puis d'une civilisation vers des niveaux technologiques plus avancés serait bloquée par des événements catastrophiques qui la mènerait à l'extinction. Ce grand filtre peut concerner soit l'apparition de la vie, soit son évolution vers des formes intelligentes, soit le développement d'une civilisation. Un exemple d'un tel filtre pour une civilisation serait le développement d'armes de destruction massive telles que des bombes atomiques, donnant lieu à une guerre nucléaire mondiale. Un autre filtre pourrait être le maintien de conditions d'habitabilité sur une planète pendant des milliards d'années, nécessaire à l'apparition et à l'évolution de la vie.

Une autre approche de résolution du paradoxe de Fermi est l'estimation du nombre de civilisations dans la galaxie. C'est le but de l'équation de Drake, qui donne N, le nombre probable de civilisations dans notre galaxie, avec la formule suivante :

$$N = R^{¿} \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

Voici ce que représente chaque terme :

- $R^{¿}$ est le nombre d'étoiles qui se forment annuellement dans notre galaxie,
- f_p est la part de ces étoiles qui sont dotées de planètes,
- n_e est le nombre de planètes potentiellement propices à la vie par étoile,
- f_l est la part de ces planètes où la vie apparaît,
- f_i est la part de ces planètes où apparaît la vie intelligente,
- f_c est la part de ces planètes où la vie peut et souhaite communiquer avec nous,
- L est la durée de vie moyenne d'une civilisation, en années.

Cette équation semble simple, mais le problème est d’estimer la valeur de ses termes. Francis Drake, son inventeur, a estimé en 1961 un nombre de 10 civilisations en mesure de communiquer dans la Voie Lactée. Cette évaluation fait débat, car, bien que l’estimation des 3 premiers facteurs est facilitée par l’observation astronomique, notamment des exoplanètes, les autres facteurs sont basés sur la seule planète où la vie a été observée, la nôtre. Ces facteurs possèdent donc une grande incertitude, rendant toute conclusion assez fragile. Toute estimation donnant $N > 1$ se heurte à la réalité de la non-détection de vie extraterrestre, ce qui nous fait revenir au paradoxe de Fermi.

Bien que cette équation ne permette pas de répondre à la question de la vie extraterrestre, elle a le mérite de stimuler le débat et la recherche sur ce sujet, ce qui était son but original. Elle a notamment poussé la NASA à lancer le projet SETI (Search for Extra-Terrestrial Intelligence) en 1961, dont le but est de détecter les traces d’une civilisation extraterrestre. La réponse au paradoxe de Fermi viendra sans doute de ce projet, si elle arrive un jour.